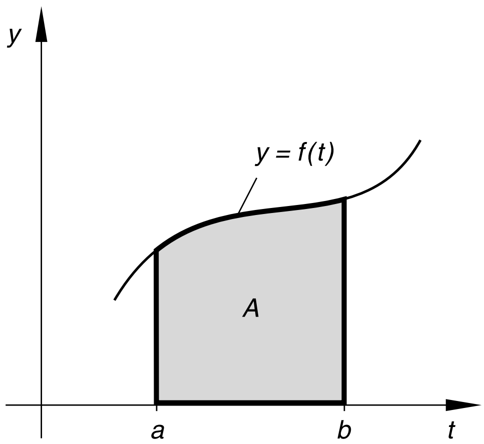
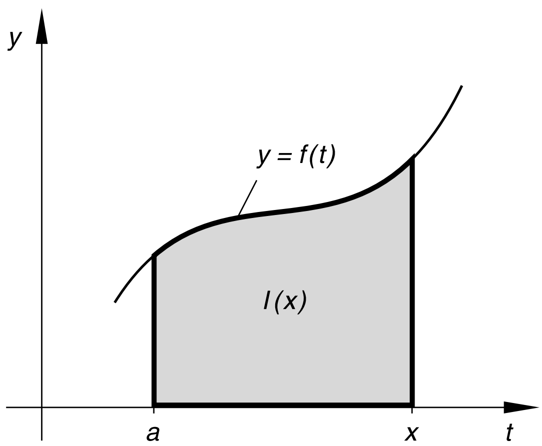
Unbestimmtes Integral und Flächenfunktion

Das bestimmte Integral als **Flächeninhalt**

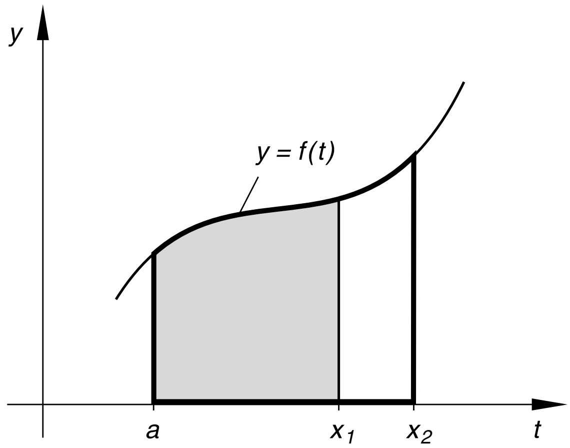


Das unbestimmte Integral als Flächenfunktion mit der untere Integrationsgrenze a als fest und die obere **Integrationsgrenze *x* dagegen variabel**, so hängt der Integralwert nur noch von der oberen Grenze x ab.

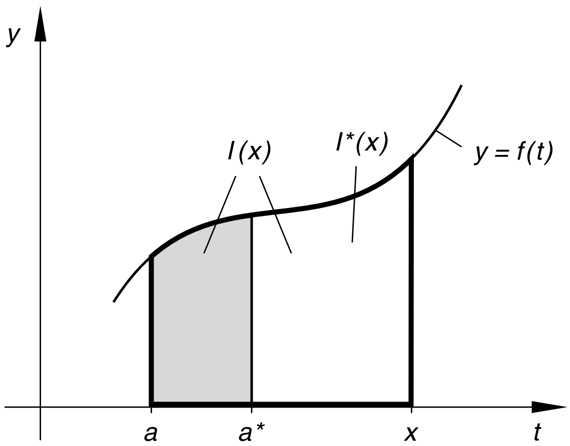


$$I\,(x) = \int_a^x f\,(t)\,dt$$

Das unbestimmte Integral als Funktion der oberen Integrationsgrenze, für **verschiedene *x*-Werte erhält man im Allgemeinen verschiedene Flächeninhalte.**



Flächenfunktionen unterscheiden sich in der unteren Grenze voneinander



Aufgabe 1:
Bestimme die Flächenfunktionen für folgende Funktionen *y=f(t)*.
Welche Eigenschaft kann man erkennen?

a) $\int_0^x t^2 dt \qquad \int_1^x t^2 dt \qquad \int_{-3}^x t^2 dt$

b) $\int_0^x t^3 dt \qquad \int_2^x t^3 dt \qquad \int_{-1}^x t^3 dt$

c) $\int_0^x t^n dt \qquad \int_3^x t^n dt \qquad \int_a^x t^n dt$

Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung

$$I(x) = \int_a^x f(t)dt \quad \Rightarrow I'(x) = f(x)$$

I(x) ist eine Stammfunktion von *f(x)*

Folgerungen aus dem Fundamentalsatz:

Jedes unbestimmte Integral *I(x)* der Funktion *f(x)* lässt sich in der Form

$$I(x) = \int_a^x f(t)dt$$

darstellen, wobei *F(x)* irgendeine (spezielle) Stammfunktion von *f(x)* und C1 eine geeignete (reelle) Konstante bedeutet, deren Wert noch von der unteren Grenze a abhängen wird.

Da es zu einer stetigen Funktion *f(x)* unendlich viele unbestimmte Integrale gibt, kennzeichnet man diese Funktionenschar durch Weglassen der Integrationsgrenzen in folgender Weise:

$$\int f(x)\, dx = F(x) + C \qquad (F'(x) = f(x))$$

darstellbar, wobei *F(x)* irgendeine (spezielle) Stammfunktion von *f(x)* bedeutet und der Parameter *C* alle reellen Werte durchläuft. Die Konstante *C* heißt Integrationskonstante.

Aufgabe 2:

Bestimme folgende unbestimmte Integrale.

a) $\int (2x - 1)\, dx$

b) $\int e^x dx$

c) $\int \frac{4}{1+x^2}\, dx$

d) $\int \ln(x)\, dx$

e) $\int (gt + v_0) dt$

Berechnung bestimmter Integrale unter Verwendung einer Stammfunktion

$$I(x) = \int_a^x f(x)\,dx = F(x) + C$$

$$\Downarrow$$

$$I(a) = \int_a^a f(x)\,dx = F(a) + C = 0$$

$$\Downarrow$$

$$C = -F(a)$$

$$\Downarrow$$

$$I(x) = \int_a^x f(x)\,dx = F(x) - F(a)$$

$$\Downarrow$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Berechnung eines bestimmten Integrals

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a)$$

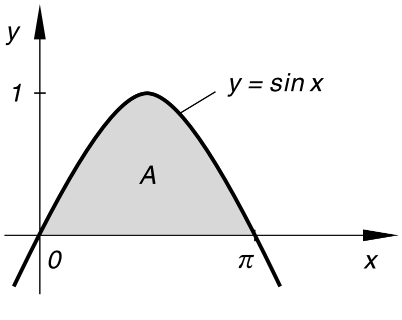
Aufgabe 3:

a) Bestimme folgendes bestimmtes Integral mit Hilfe der Stammfunktion:

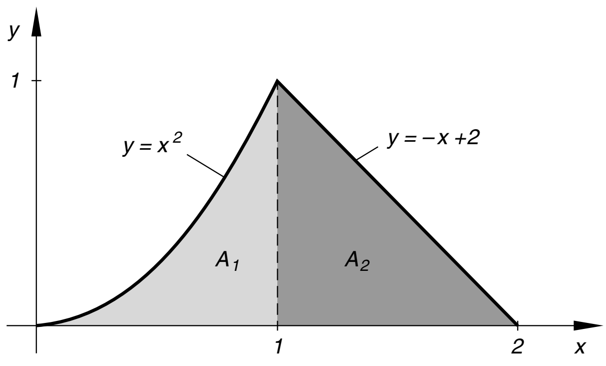
$$\int_1^2 (x^3 - 2x^2 + 5)\,dx =$$

b) Berechne folgende Flächeninhalte:

b1)



b2)



Grundintegrale

$\int 0dx$	C
$\int 1dx$	$x+C$
$\int xdx$	$\frac{x^2}{2}+C$
$\int x^n dx$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}+C \quad n\neq -1$
$\int \frac{1}{x}dx$	$ln\lvert x\rvert+C$
$\int \frac{1}{x^2}dx$	$\frac{x^{-1}}{-1} = -\frac{1}{x}+C$
$\int \frac{1}{x^n}dx$	$-\frac{x^{-(n-1)}}{n-1}$ $-\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}+C$
$\int \sqrt{x}\,dx$	$\frac{x^{3/2}}{3/2}$ $\frac{2}{3}\sqrt{x^3}+C$
$\int \sqrt[3]{x}\,dx$	$\frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4}+C$
$\int \sqrt[n]{x}\,dx$	$\frac{n}{n+1}\sqrt[n]{x^{n+1}}+C$
$\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx$	$2\sqrt{x}+C$
$\int sin(\omega\cdot x)dx$	$-\frac{1}{\omega}cos\,(\omega x)+C$ wegen Kettenfunktion
$\int cos(\omega\cdot x)dx$	$\frac{1}{\omega}\ sin(\omega x)+C$
$\int tan(\omega\cdot x)dx$	$-\frac{1}{\omega}\ln\lvert\cos(\omega\ x)\rvert+C$
$\int cot(\omega\cdot x)dx$	$\frac{1}{\omega}\ln\lvert\sin(\omega\ x)\rvert+C$

$\int \frac{1}{cos^2(x)}dx$	$tan\,(x)+C$
$\int \frac{1}{sin^2(x)}dx$	$-cot(x)+C$
$\int e^x dx$	e^x+C
$\int e^{\lambda x}dx$	$\frac{1}{\lambda}\cdot e^{\lambda x}+C$
$\int a^x dx$	$\frac{a^x}{\ln(a)}+C$
$\int ln(x)dx$	$x\cdot ln(x)-x+C$
$\int log_a(x)dx$	$xlog_a(x)-xlog_a(e)+C$
$\int \frac{1}{1+x^2}dx$	$\arctan(x)+C$
$\int \frac{1}{a^2+x^2}dx$	$\frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right)+C$
$\int \frac{1}{(ax+b)^2}dx$	$-\frac{1}{a(ax+b)}+C$
$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$	$\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)+C$
$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}dx$	$\ln\,(\sqrt{x^2-1}+x+C$
$\int \frac{1}{1-x^2}dx$	$-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)+C$
$\int \frac{1}{x+b}dx$	$\ln\lvert x+b\rvert+C$
$\int \frac{1}{ax+b}dx$	$\frac{1}{a}\ln\lvert ax+b\rvert+C$

Faktor- und Summenregel

$\int a\cdot f(x)\,dx = a\cdot\int f(x)\,dx$

$\int[f(x)\pm g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$

Aufgabe 4:

Ermittle die unbestimmten Integrale.

0 **a)** $\int 4x^3\,dx$ **b)** $\int \frac{1}{3x^4}\,dx$ **c)** $\int t\cdot\sqrt[4]{t^3}\,dt$ **d)** $\int \frac{3}{\sqrt[3]{r^2}}\,dr$

1 **a)** $\int(2x^3-4e^x)\,dx$ **b)** $\int(4\cos t+t)\,dt$ **c)** $\int\left(\frac{1}{2u}+\sin u\right)du$

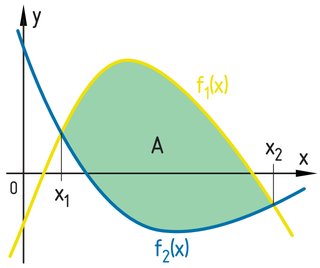
2 **a)** $\int\left(2^x+\frac{3}{x}-2e^x\right)dx$ **b)** $\int\left(\frac{2}{\cos^2 t}-4t\right)dt$ **c)** $\int\left(\frac{a}{1+s^2}+bs^2+c\right)ds$

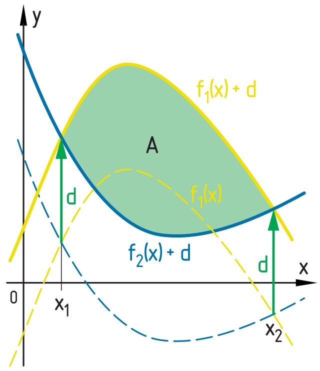
Ermittle die bestimmten Integrale.

3 **a)** $\int_1^4\left(\ln 2-\frac{3}{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$ **b)** $\int_{-3}^{-1}\left(1+\frac{1}{3x^2}-2x\right)dx$ **c)** $\int_0^1(2x\sqrt[3]{x}-2)\,dx$

4 **a)** $\int_0^{\pi}(2\sin t-4\cos t)\,dt$ **b)** $\int_0^1\left(\frac{2}{1+x^2}-\pi\right)dx$ **c)** $\int_0^2(3e^2-2e^x)\,dx$

Flächeninhalt zwischen zwei Kurven $y = f_1(x)$ und $y = f_2(x)$





$$A = \int_a^b [f_1(x) + d - (f_2(x) + d)]\,dx = \int_a^b [f_1(x) - f_2(x)]\,dx$$

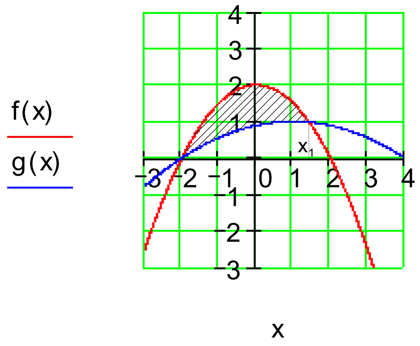
Gilt $f_1(x) \geqslant f_2(x)$ im Intervall $[a; b]$, so kann der Flächeninhalt A, der von beiden Kurven in $[a; b]$ eingeschlossen wird, als bestimmtes Integral der Differenz der Funktionen berechnet werden.

$$A = \int_a^b [f_1(x) - f_2(x)]\,dx$$

Aufgabe: Fläche zwischen zwei Funktionen

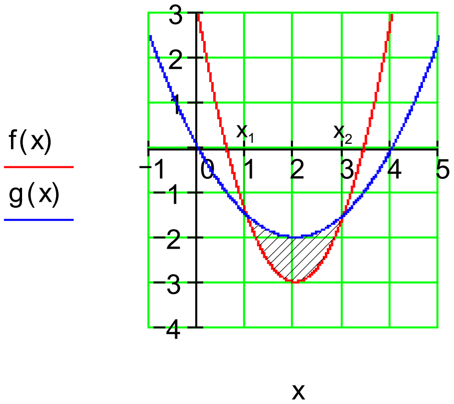
Aufgabe 1

$f(x) = -0{,}5x^2 + 2; \quad g(x) = -\frac{1}{9}x^2 + \frac{2}{9}x + \frac{8}{9}$



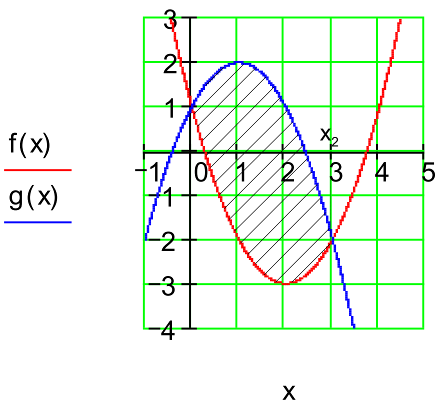
Aufgabe 2

$f(x) = \frac{3}{2}x^2 - 6x + 3; \quad g(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x$



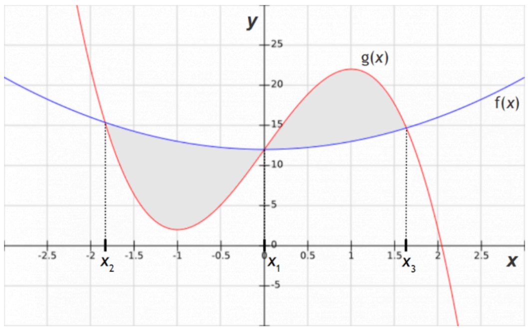
Aufgabe 3

$f(x) = x^2 - 4x + 1; \quad g(x) = -x^2 + 2x + 1$



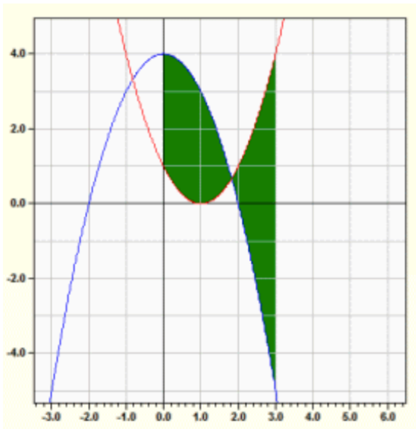
Aufgabe 4

$f(x) = x^2 + 12; \quad g(x) = -5x^3 + 15x + 12$

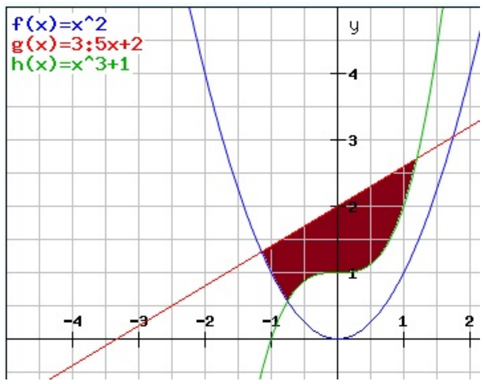


Aufgabe 5

$f(x) = -x^2 + 4; \quad g(x) = (x-1)^2$



Aufgabe 6



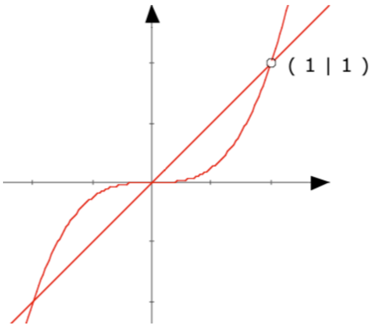
Berechnen Sie den Inhalt des Flächenstückes, das die Graphen der Funktionen f und g einschliessen.

a) f : $y = x$ g : $y = x^3$

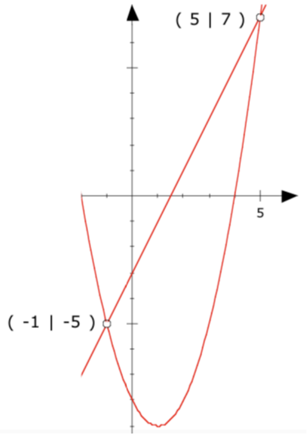
b) f : $y = 2x - 3$ g : $y = x^2 - 2x - 8$

c) f : $y = x^3$ g : $y = 2x - x^2$

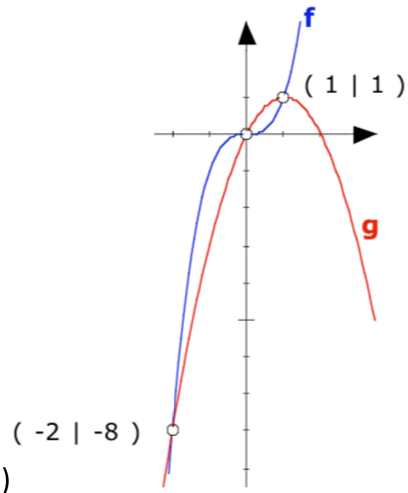
d) f : $y = x^2 - 3x$ g : $y = x^3 - 6x^2 + 9x$



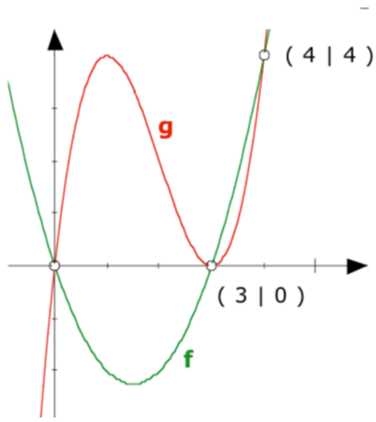
a)



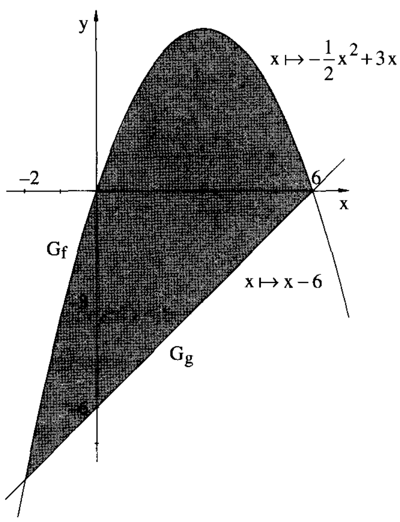
b)



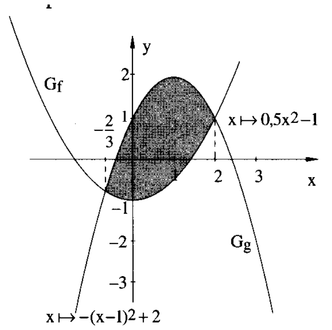
c)



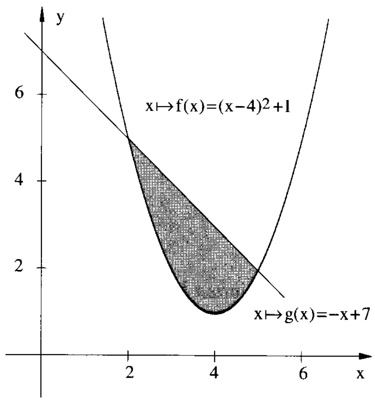
d)



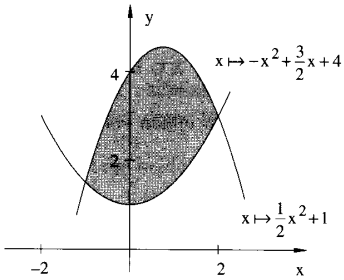
1.



2.



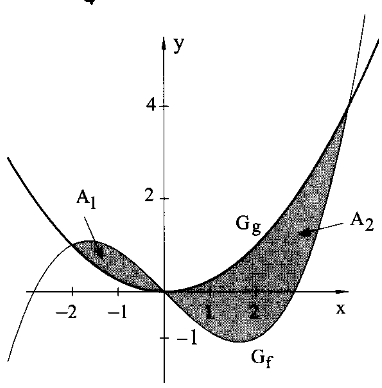
3.



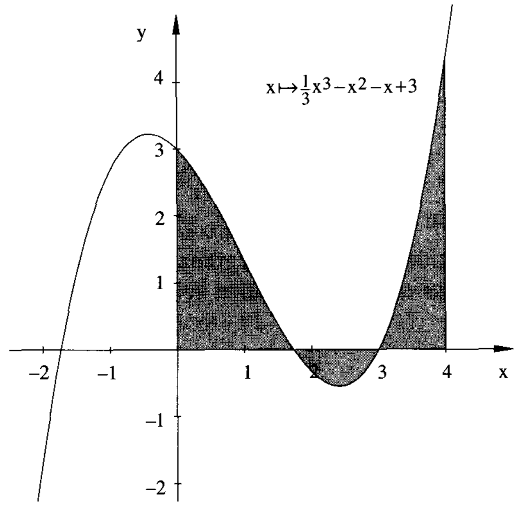
4.

f: $x \mapsto \frac{1}{8}x^3 - x$; $x \in \mathbb{R}$ und

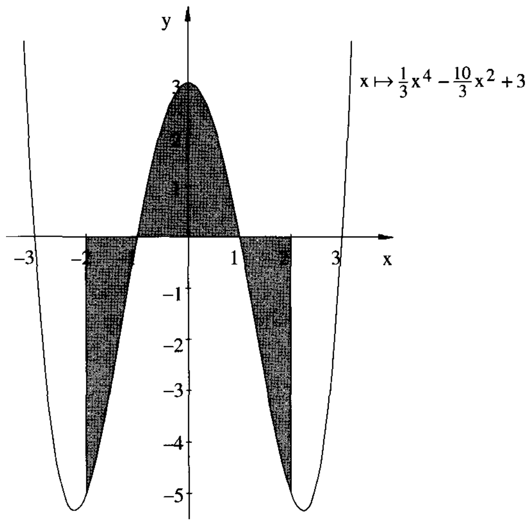
g: $x \mapsto \frac{1}{4}x^2$; $x \in \mathbb{R}$.



5.



6.



Volumen von Rotationskörper

1. Eine Vase habe eine Form, die man sich durch Rotation des Graphen der Funktion $y = \frac{1}{10}x^2 + 1$ [dm] um die x- Achse im Intervall [-3dm; 3dm] entstanden denken kann. Berechne die Querschnittsfläche und das Volumen!

2. Die Form einer Fanfare entsteht (annähernd) durch Rotation des Graphen der Funktion $y = 0{,}4 \cdot e^x + 0{,}1$[dm] um die x-Achse im Intervall [-8dm; 2dm]. Berechne die Querschnittsfläche, das Volumen der Fanfare!

3. Ein Fass wird begrenzt von der Fläche, die durch Rotation des Graphen der Funktion $y = 25 - \frac{1}{180}x^2$[cm] um die x- Achse im Intervall [-30cm; 30cm] entsteht. Berechne das Volumen des Fasses! Wie viel Liter haben Platz? Wie lange sind die Fasslatten?

4. Leite die Formel V für das Volumen a) eines Kegels b) Kegelstumpfs c) einer Kugel d) eines Kugelabschnitts her!
5. Durch die Gleichung $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ist eine Ellipse gegeben. Für a = 3 und b = 2 nehme man an, die Ellipse rotiert a) um die x-Achse, b) um die y-Achse. Berechne das Volumen des entstehenden Rotationsellipsoids!
6. Durch die Gleichung $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ist eine Hyperbel gegeben. Sei a = 3 und b = 2 sowie $-6 \le x \le 6$! Der zwischen den Geraden mit den Gleichungen x = 2a und x = -2a liegende Teil der Hyperbel rotiert a) um die x-Achse, b) um die y-Achse. Berechne das Volumen des entstehenden Rotationshyperboloids!
7. Der Hohlraum eines Bechers entsteht durch Rotation der Funktion $y = \sqrt{k \cdot x}$ um die x-Achse zwischen x = 0 und x = 3cm. Wähle k so, dass der obere Rand des Bechers den Radius r = 6cm hat. Wie groß ist das Volumen des Bechers?
8. Der Hohlraum einer Sektschale entsteht durch Rotation der Funktion $y = k\sqrt{x}$ um die x-Achse. Der Hohlraum ist 4 cm hoch und der Rand hat einen Radius von 6 cm. Wie groß ist das Volumen des Bechers?
9. Die von der Kurve $y = \frac{1}{3}\sqrt{x} \cdot (3 - x)$ und der x-Achse begrenzte Fläche wird um die x-Achse rotiert.
   a) Berechne den Inhalt der Fläche A. b) Das Volumen V_x des Rotationskörpers.

10. Die von der Kurve $y = \frac{1}{2} \cdot e^{-2x}$ den beiden Koordinatenachsen und der Geraden x=1 begrenzte Fläche A wird um die x-Achse rotiert.
    a) Berechne den Inhalt der Fläche A.
    b) Das Volumen V_x des Rotationskörpers.