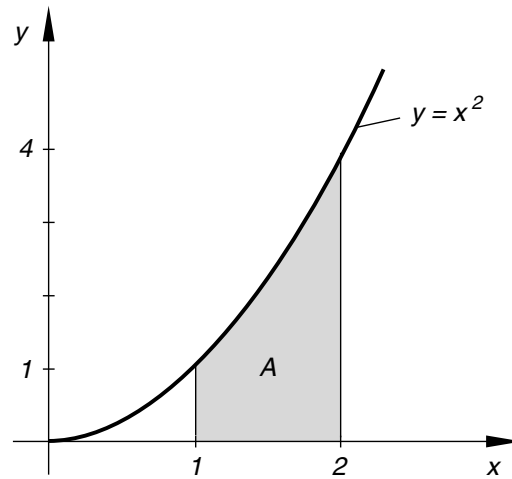
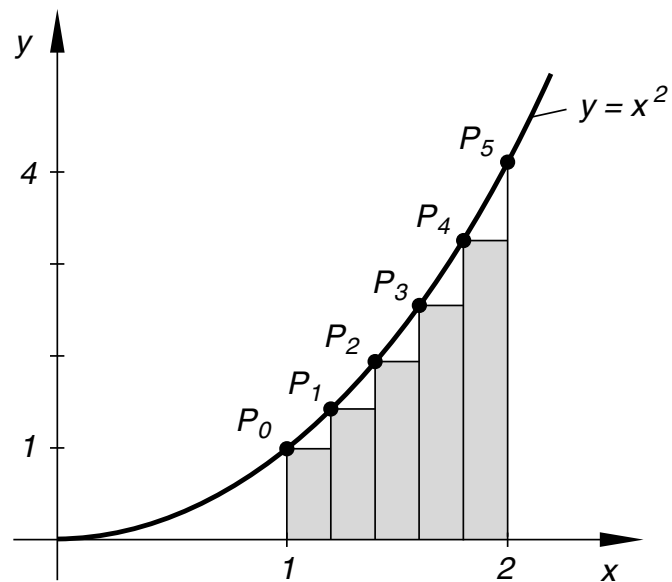


Das bestimmte Integral als Flächeninhalt

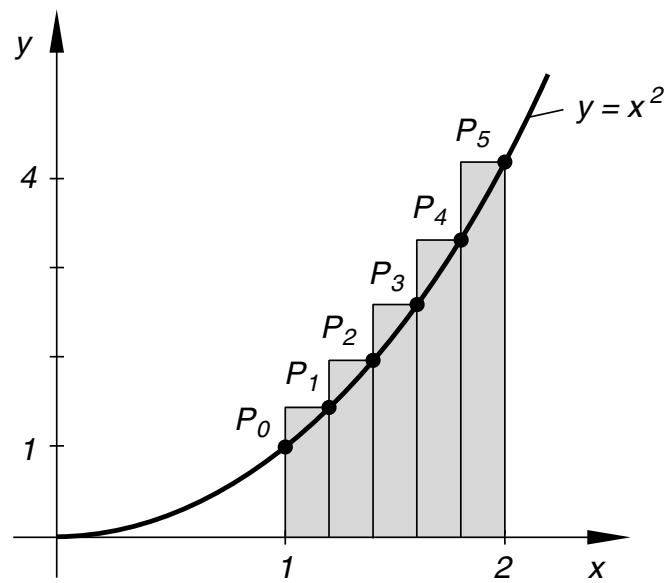
Das Flächenproblem



Zerlegung der Fläche in $n = 5$ Streifen



Untersumme U_5



Obersumme O_5

Flächeninhalt A

$$U_5 \leq A \leq O_5.$$

Die Differenz zwischen Ober- und Untersumme beträgt: **$O_5 - U_5$**

Zerlegung der Fläche in n=10 Streifen

Streifenbreite: $\Delta x = 0,1$

Untersumme U_{10}

Obersumme: O_{10}

Flächeninhalt A

$$U_{10} \leq A \leq O_{10}$$

Die Differenz zwischen Ober- und Untersumme beträgt: $O_{10} - U_{10}$

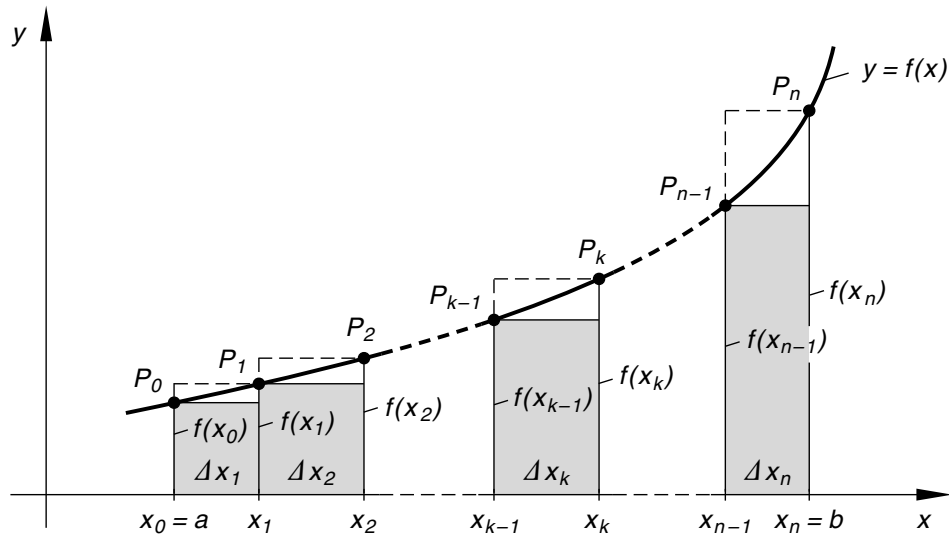
n	5	10	20	50	100	1000
U_n	2,04	2,185	2,258 75	2,3034	2,318 35	2,331 833 5
O_n	2,64	2,485	2,408 75	2,3634	2,348 35	2,334 833 5
$O_n - U_n$	0,6	0,3	0,15	0,06	0,03	0,003

Grenzübergang für $n \rightarrow \infty$

Flächeninhalt A

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} U_n = \lim_{n \rightarrow \infty} O_n = \frac{7}{3} = 2,\overline{3} \dots$$

Verallgemeinerung: Das bestimmte Integral



Gleiche Streifenbreite: Δx

Untersumme:

Obersumme:

Die gesuchte Fläche A liegt damit zwischen Unter- und Obersumme:

$$U_n \leq A \leq O_n$$

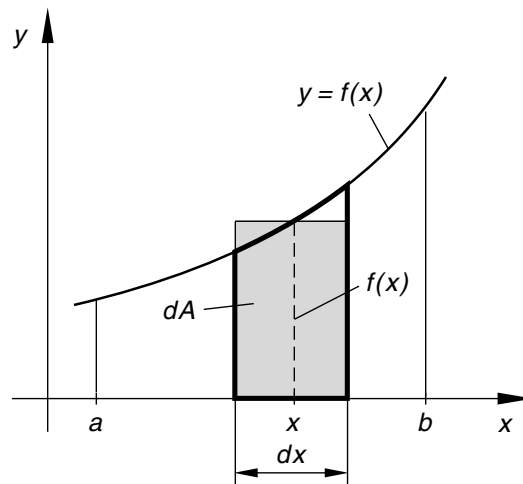
Grenzübergang für $n \rightarrow \infty$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = \lim_{n \rightarrow \infty} O_n$$

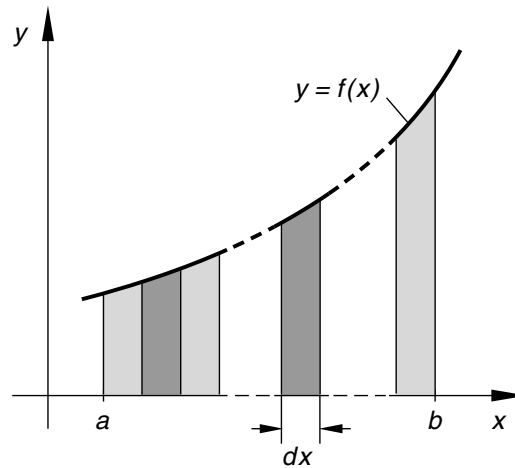
Grenzwert der Obersumme:

- x : Integrationsvariable
- $f(x)$: Integrandfunktion (kurz: Integrand)
- a : Untere Integrationsgrenze
- b : Obere Integrationsgrenze

Anschauliche geometrische Interpretation des bestimmten Integrals



Das bestimmte Integral als unendliche Summe von Flächenelementen

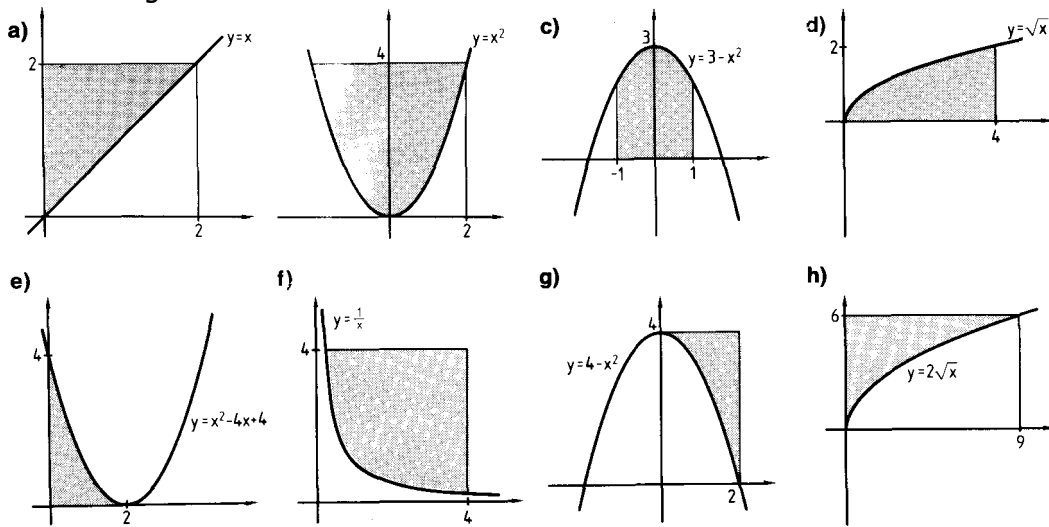


Aufgabe 1:

- a) Man berechne das bestimmte Integral $\int_0^b x^2 dx$ als Grenzwert der Obersumme.
- b) Man finde eine Formel für das bestimmte Integral $\int_a^b x^2 dx$.
- c) Man berechne das bestimmte Integral $\int_0^b x^3 dx$ als Grenzwert der Obersumme.
- d) Man finde eine Formel für das bestimmte Integral $\int_a^b x^3 dx$.
- e) Man finde eine Formel für das bestimmte Integral $\int_a^b x^n dx$.

Aufgabe 2:

Der grau unterlegte Flächeninhalt A ist zu bestimmen:



REGEL 1: Faktorregel

Ein *konstanter Faktor* darf *vor* das Integral gezogen werden:

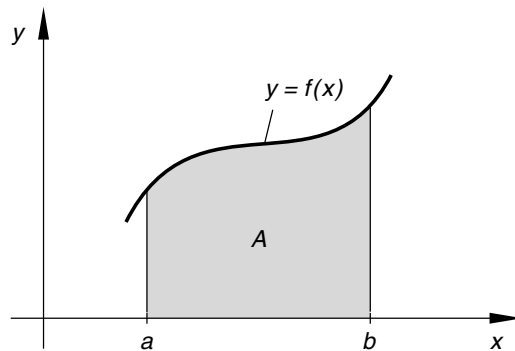
$$\int_a^b C \cdot f(x) dx = C \cdot \int_a^b f(x) dx \quad (C: \text{Konstante})$$

REGEL 2: Summenregel

Eine *endliche* Summe von Funktionen darf *gliedweise* integriert werden:

$$\int_a^b (f_1(x) + \dots + f_n(x)) dx = \int_a^b f_1(x) dx + \dots + \int_a^b f_n(x) dx$$

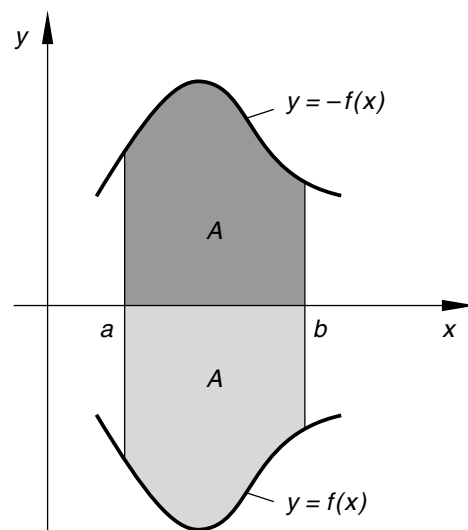
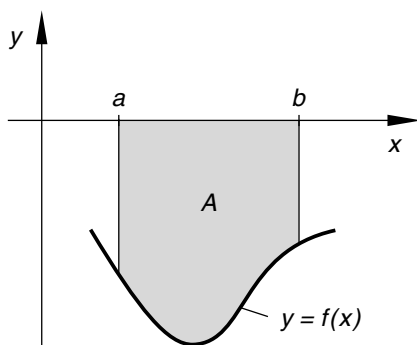
Bestimmtes Integral und Flächeninhalt



Bei der Berechnung des Flächeninhaltes A zwischen einer Kurve $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$ und der x-Achse, wenn die Kurve oberhalb der x-Achse verläuft gilt:

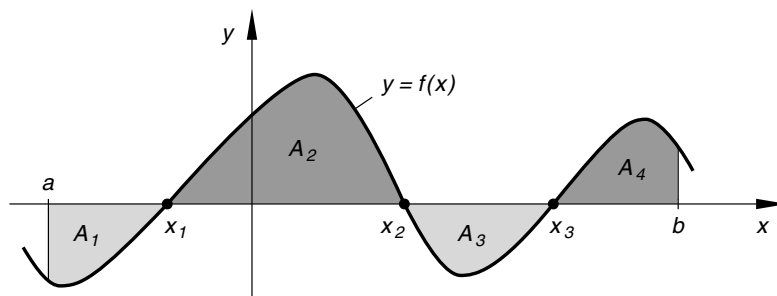
$$A = \int_a^b f(x) dx$$

Liegt das **Flächenstück** jedoch, **vollständig unterhalb der x-Achse**, so ist der Integralwert $\int_a^b f(x) dx$ **negativ** und kann daher nicht dem gesuchten Flächeninhalt A entsprechen.



$$A = - \int_a^b f(x) dx = \int_b^a f(x) dx = \left| \int_a^b f(x) dx \right|$$

Flächeninhalt im allgemeinen Fall

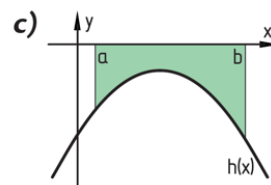
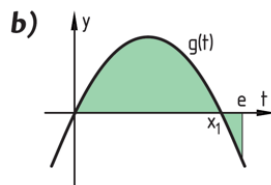
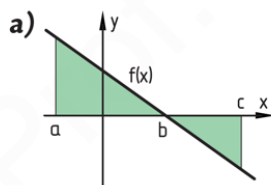


Zerlegung der Fläche in Teilflächen

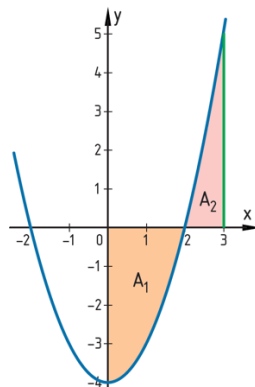
$$\left| \int_a^{x_1} f(x) dx \right| + \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx + \left| \int_{x_2}^{x_3} f(x) dx \right| + \int_{x_3}^b f(x) dx$$

Aufgabe 3:

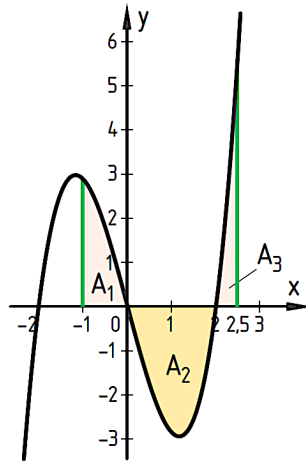
1. Gib die Inhalte der dargestellten Flächen als bestimmtes Integral an:



2. Ermittle den Inhalt der Fläche, die von der Kurve $y = x^2 - 4$, der x-Achse und den Senkrechten $x = 0$ und $x = 3$ eingeschlossen wird.



3. Berechne den Inhalt der Fläche, die von der Kurve $y = x^3 - 4x$, der x-Achse und den Senkrechten $x = -1$ und $x = 2,5$ eingeschlossen wird.



4. Man berechne den Flächeninhalt zwischen der Polynomfunktion $y = x^3 - 3x^2 - 6x + 8$, der x-Achse und den Parallelen $x = 2,5$ und $x = 3$.

